

ÜNİTE 7 : POLİNOMLAR

7. 1. Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$ ifadesine “ bir bilinmeyenli reel katsayılı polinom ” adı verilir.

- Polinomlarda x 'in kuvvetleri doğal sayı olmalıdır.
- Derecesi en büyük olan terimin katsayısına “ **baş katsayı** ” ve bu terimin derecesine “ **polinomun derecesi** ” adı verilir.

$\deg [P(x)]$: Polinomun derecesini gösterir.

a_0 : Polinomun sabit terimini gösterir. (x 'li olmayan terim)

Örnek 1: Aşağıdaki ifadelerin polinom olup olmadığını kontrol ediniz.

A) $P(x) = -4 + x + 3.x^2$ **B)** $P(x) = 2.x - x^3 + \frac{6}{x}$

C) $P(x) = 17$

D) $P(x) = 5.x^6 - \sqrt{3}.x + 8$

E) $P(x) = 2.x + \sqrt[5]{x^2} - 7$ **F)** $P(x) = \frac{2.x^6}{x^2} - 10.x^9 + 1$

Örnek 2: $P(x) = 7x^2 - x^3 + 4x^5 - 6 + 3x$ polinomunun; sabit terimi, baş katsayısı ile derecesinin çarpımı kaç olur ?

Örnek 3: $P(x) = 2x^{\frac{7}{m-1}} - 8x$ polinom ise m değerleri ne olabilir ? (Kuvvet doğal sayı olacak şekilde çözüm üretilir.)

Soru: $P(x) = 4x^2 - x^{\frac{6}{m+2}}$ polinom ise m değerlerinin toplamı kaçtır ?

Soru: $P(x) = 12 + x^{\frac{12}{1+m}} + 3x^{5-m}$ polinom ise m değerlerinin adedini bulunuz.

Sabit Polinom : $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(x) = c$ polinomuna “sabit polinom” adı verilir. x ’in her değeri için polinomun sonucu aynıdır. (Yani c)

***** Sabit polinomda x ’li terim bulunmamalıdır. (Sabit fonksiyonda da aynı konu işlenmişti.)**

Soru : $P(x) = (9 - 3k) \cdot x + k - 12$ sabit polinom ise $P(6) = ?$

Soru : $P(x) = (2m - n) \cdot x^2 + (m + 4) \cdot x + n$ sabit polinom ise $P(1) = ?$

Sıfır Polinom : $P(x) = 0$ polinomuna “sıfır polinomu” adı verilir.

***** Sıfır polinomunda x ’li terim bulunmamalıdır. x ’li terim dışındakilerde 0’a eşitlenir.**

Soru : $P(x) = mx - 2x + 4n + 12$ sıfır polinomu ise $m \cdot n = ?$

Soru : $P(x) = (2k + 4) \cdot x^{11} + (m - 3) \cdot x + n - m + 1$
sıfır polinomu ise $k + m + n = ?$

İki Polinomun Eşitliği

$P(x)$ ve $Q(x)$ gibi iki polinomun dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerin katsayıları da birbirine eşit ise bu iki polinoma “eşit polinom” adı verilir.

İki eşit polinomda aynı dereceli terimlerin katsayıları birbirine eşitlenir.

Örnek: $P(x) = (a - 1) \cdot x^3 - 7x + 8 + (b + 1) \cdot x^2$ ile
 $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 - cx + d$ polinomları birbirine eşit ise
 $a + b + c + d = ?$

Soru : $P(x) = (a - 3) \cdot x^8 + x^5 + dx - c + 2$ ile

$Q(x) = 5 + 7x^8 + (2b - 3) \cdot x^5$ polinomları birbirine eşit ise

$a \cdot b \cdot c + d = ?$

Soru: $(2k - 5) \cdot x^2 + 5x + m - 1 = 6 + x^2 + 2x + nx$ ise
 $k \cdot m \cdot n = ?$

Soru : $(2x + 1) \cdot (x - 3) = ax^2 + c + 4 + (b - 2) \cdot x$

ise $a + b + c = ?$

Kural 1: $P(x)$ polinomu verildiğinde $P(a)$ istenirse, eşitlikte x yerine a yazılır. (Fonksiyon konusunda işlenmişti.)

Soru: $P(x) = 2x - x^3 + 3$ için $P(3) = ?$

Soru: $P(x) = x^2 - 4x + 5$ için $P(-2) + P(5) = ?$

Soru : $P(x) = 3x - 11$ için $P(4x + 5) = ?$

Soru : $P(x) = 5 - 2x$ için $P(x + 2) - P(x - 3) = ?$

Soru : $P(x) = x^2 - 2x$ için $P(x + 4) = ?$

Soru : $P(x) = x^2 + 5x - 6$ için $P(x - 3) = ?$

Not : Polinomun iç kısmı ile eşitliğin diğer tarafında aynı terimler varsa, bu terime x dönüşümü yaparak $P (x)$ polinomu bulunur. Bazı durumlarda ortak paranteze alma metodu kullanılabilir.

Örnek : $P (x + 4) = (x + 4)^2 + 5x + 20$ ise $P (x) = ?$

Soru : $P (x - 5) = (x - 5)^3 + 3x - 16$ ise $P (x) = ?$

Kural 2: *A*) $P(0)$ polinomun **sabit terimini** bulmak için kullanılır.

B) $P(1)$ ise polinomun **katsayılar toplamını** bulmak için kullanılır.

Örnek: $P(x) = (3x - 2)^2 + 4x - 5$ polinomunun sabit terimi ile katsayılar toplamını bulunuz.

Soru : $P(x) = (7x + x^2 - 5)^3 + 2x$ polinomunun sabit terimi ile katsayılar toplamını bulunuz.

Soru : $P(x) = 9x^2 + (2x + 1)^4 - 25$ polinomunun sabit terimi ile katsayılar toplamının toplamını bulunuz.

Soru : $P (x - 1) + P (x + 1) = x^2 + 6x - 9$ veriliyor.

$P (3) = 11$ ise $P (x)$ polinomunun katsayılar toplamını bulunuz. (İsteneni bulmak ve verileni kullanmak için eşitlikte x yerine uygun sayı alınır.)

Soru : $P (x - 2) - P (x + 3) = 2x^2 - 3x + 1$ veriliyor.
 $P (5) = 8$ ise $P (x)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

Not : $P [Q (x)]$ verildiğinde $P (x)$ 'i bulmak için eşitlikte x yerine $Q (x)$ 'in tersi yazılır. (Fonksiyon konusunda işlenmişti.)

Soru : $P (x - 4) = 6 - 5x$ ise $P (x) = ?$

Soru : $P (2x + 8) = 4x - 11$ ise $P (x) = ?$

Soru : $P (3x + 1) = 4x - 22$ ise $P (10) = ?$

($P (x)$ 'i bulup x yerine 10 yazmak yerine, isteneni verecek şekilde x için uygun sayı kullanılır.)

Soru : $P (5x - 7) = x^2 - 2x + 5$ ise $P (-17) = ?$

Soru : $P (x - 3 , 2y + 4) = x^2 . y + 2x - x^3 . y^2 + 3y - 4$ için
 $P (0 , 6) = ?$

Polinomlarda Toplama – Çıkartma ve Çarpma İşlemi

Aynı dereceden olan ifadelerin katsayıları verilen işleme göre toplanır veya çıkartılır. Çarpma işleminde ise dağılma özelliği kullanılır ve katsayılar çarpılır, x 'li terimlerin kuvveti toplanır.

Soru: $P(x) = 3x - 9$ ve $Q(x) = 10 - x$ ise

$$2 \cdot P(x) - 4 \cdot Q(x) = ?$$

Soru: $P(x) = 8x^2 - 12x + 20$ ve $Q(x) = -x^2 + 2x + 5$

ise $\frac{P(x)}{4} + 2 \cdot Q(x) = ?$

Soru: $P(x) = x^2 - 4x$ ve $Q(x) = 3x + 7$ ise

$P(x) \cdot Q(x) = ?$

Soru : $(4x^2 + 3x - 6) \cdot (5x - x^2 + 2)$ çarpımının açılımında x^2 'li terimin katsayısı ne olur ?

Polinomlarda Bölme İşlemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom olsun. $\deg[P(x)] \geq \deg[Q(x)]$ ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere iki polinomun bölme işlemi verilirse bildiğimiz bölme işlemi yapılır. Kalanın derecesi bölenden küçük olana kadar bölme işlemi devam ettirilir.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & R(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

P : Bölünen

Q : Bölen

R : Bölüm

K : Kalan

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + K(x) \text{ idi.}$$

Örnek 1: Bir $P(x)$ polinomunun $x^2 + 3$ ile bölümünden bölüm $x - 1$ ve kalan $2x + 1$ elde ediliyorsa $P(x) = ?$

Örnek 2: Aşağıdaki bölme işlemini yapınız.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 7 & x - 2 \\ \hline \end{array}$$

Not: Bölme işleminde ilk önce en büyük dereceli x 'li terim yok edilir.

Soru :

$$2x^2 - 9x - 6 \quad | \quad x + 3$$

Soru :

$$-x^3 + 2x^2 - 5x + 4 \quad | \quad x + 1$$

Soru :

$$4x^3 - 7x^2 + 6x + 2 \quad | \quad x - 1$$

Soru :

$$x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \quad | \quad x^2 + x$$

Kalanı Kısa Yoldan Bulma Kuralları

Kural 1: Bir $P(x)$ polinomunun $ax + b$ ile bölümünden kalanı bulmak için;

A) $ax + b = 0$ eşitliğinden x değeri bulunur.

B) Bulunan x değeri polinomda yerine yazılır.

Örnek: $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru: $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$ polinomunun $x + 3$ ile bölümden kalanı bulunuz.

Soru : $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 4$ polinomunun $2x + 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru: $P(x) = x^2 - ax + 4$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalan 3 ise $a = ?$

Soru: $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - m + 1$ polinomunun $x - \sqrt{2}$ ile bölümünden kalan -2 ise $m = ?$

Soru : $P(x) = -x^3 + kx^2 - 2x + k$ polinomunun $2x + 4$ ile bölümünden kalan 6 ise polinomun $x - 1$ ile bölümünden kalan kaçtır ?

Soru : $P(3 - x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 1$ ise $P(x)$ polinomu-
nun $x - 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz. (İsteneni bulmak için
verilen denklemde x yerine uygun bir sayı almalıyız.)

Soru: $P(2x + 3) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 2$ ise $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru : $P (x + 2) = (x^3 - 2x - 3) . Q (x) + x^2 + x + 1$
veriliyor. $Q (x)$ 'in sabit terimi 5 ise $P (x)$ polinomunun
 $- 3x + 6$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Kural 2: Bir $P(x)$ polinomunun $x^n - a$ ile bölümünden kalanı bulmak için;

A) $x^n - a = 0$ eşitliğinden x^n değeri bulunur. *** x bulunmaya çalışılmaz.

B) Bulunan x^n değeri polinomda yerine yazılır.

Örnek: $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 5$ polinomunun $x^2 + 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru : $P(x) = x^{20} + x^{12} - 3x^4 + 2$ polinomunun $x^4 - 2$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru: $P(x) = 2x^{12} - x^7 + 4x^3 + 7x - 2$ polinomunun $3 - x^3$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru: $P(x) = 3x^{10} - mx^5 + 8$ polinomunun $x^5 - 5$ ile bölünmünden kalan 3 ise $m = ?$

Soru : $P(x) = x^9 - 3x^6 + 2x^4 + x - 5$ polinomunun $x^3 + 2$ ile bölümünden kalan $kx + n$ ise $k.n = ?$ (Kural uygulanır. Bulunan sonuç kalana eşitlenir.)

Soru : $P(x) = 2x^6 - 4x^4 - ax^3 + bx^2 + 1$ polinomunun $x^3 - 1$ ile bölümünden kalan $x^2 + 3x + c$ ise $a + b + c = ?$

Kural: $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile $x - b$ ifadelerine bölümden kalanlar verilsin.

$P(x)$ polinomunun $(x - a) \cdot (x - b)$ ile bölümünden kalanı bulmak için;

$P(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot Q(x) + mx + n$ eşitliğinden faydalanılır. Eşitlikteki $mx + n$ istenen kalandır.

$x - a = 0$ için $x = a$ olur.

$x - b = 0$ için $x = b$ olur.

} Bulunan x değerleri eşitlikte
sıra ile yazılır ve m ile n değerleri uygun çözüm üretilerek bulunur.

Örnek: $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan -2 ,
 $x - 2$ ile bölümünden kalan 10 ise, polinomun $(x + 1) \cdot (x - 2)$
ile bölümünden kalanı bulunuz.

Soru : $P(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan 12 ,
 $x - 1$ ile bölümünden kalan 2 ise, polinomun $x^2 - 4x + 3$ ile
bölümünden kalanı bulunuz. ($x^2 - 4x + 3 = (x - 3) \cdot (x - 1)$
olarak çarpanlarına ayrılırdı.)

Soru : $P(x)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan -3 ,
 $x - 3$ ile bölümünden kalan 2 ise, polinomun $x^2 - x - 6$ ile
bölümünden kalanı bulunuz.

Kural: Bölünen ve bölen belli ise bölümün derecesi belirlenerek,
 $\text{Bölünen} = \text{Bölen} \cdot \text{Bölüm} + \text{Kalan}$ eşitliği kullanılır. Eşitlikteki
benzer terimlerin katsayıları eşitliğinden istenen bulunur.

Bölüm 1. dereceden ise bölüm $ax + b$ olarak alınır.

Bölüm 2. dereceden ise bölüm $ax^2 + bx + c$ olarak alınır.

...

Örnek: $P(x) = x^3 + mx^2 + nx - 6$ polinomu $x^2 - x - 2$ ile
tam bölünüyorsa $m \cdot n = ?$

Soru: $P(x) = mx^3 - 9x^2 + nx + 6$ polinomu $x^2 - 5x + 6$ ile tam bölünüyorsa $m + n = ?$

Soru: $P(x) = 2x^3 - mx^2 + nx + 1$ polinomu $x^2 - x + 1$ ile tam bölünüyorsa $m/n = ?$

Kural: (Derece Uygulamaları)

der [$P (x)$] = m ve der [$Q (x)$] = n olsun.

(Sorularda basit olarak $P (x) = x^m$ ve $Q (x) = x^n$ olarak alınabilir.)

1) der [$P (x) \cdot Q (x)$] = $m + n$ olarak alınır.

2) der [$P (x) / Q (x)$] = $m - n$ olarak alınır.

3) der [$P (x) \mp Q (x)$] = m ($m > n$ ise)

veya $= n$ ($n < m$ ise) olarak alınır.

Toplamda hangi polinomun derecesi büyük ise sonuç olarak o polinomun derecesi alınır.

4) der [$k \cdot P (x)$] = m olarak alınır. Katsayı polinomun derecesini etkilemez.

5) der [$P (x^k)$] = $k \cdot m$ olarak alınır.

6) der [$P^k (x)$] = $k \cdot m$ olarak alınır.

Örnek: der $[P (x)] = 5$ ve der $[Q (x)] = 3$ ise;

A) der $[P (x) . Q (x)] + \text{der} [P (x) / Q (x)] = ?$

B) der $[P (x) + Q (x)] = ?$

C) der $[P^3 (x)] - \text{der} [4 . Q (x)] = ?$

Soru: der $[P (x)] = 4$ ve der $[Q (x)] = 8$ ise;

A) der $[P^4 (x) . Q (x)] = ?$

B) der $[x^{12} . P (x) + Q (x^3)] = ?$

C) der $[P^2 (x^5)] = ?$

Soru : der $[P (x) . Q (x)] = 5$ ve
der $[P (x) / Q (x)] = 3$ ise P ve Q polinomlarının derece-
sini bulunuz.

Soru: der $[P^2 (x) . Q (x)] = 15$ ve

der $[P (x) / Q (x^2)] = 5$ ise der $[P (x) + Q (x)] = ?$

Soru: der $[P^2 (x) . Q (x^3)] = 20$ ve

der $[P (x) . Q (x)] = 7$ ise der $[Q (x) / P (x)] = ?$

Karışık Uygulamalar

Örnek: $P(x - 3) + P(x - 1) = 6x - 10$ ise $P(x) = ?$
(Toplamın sonucu 1. dereceden olduğuna göre $P(x)$ polinomu
1. dereceden bir ifade olarak alınır. Her eşitliğe göre polinomun
derecesine karar verilir.)

Soru : $P(2x - 3) + P(x + 1) = -3x + 6$ ise $P(x) = ?$

Soru: $(x - 1) \cdot P(x) + x - 1 = 4x^2 - 5kx + 6$ ise
 $k + P(x) = ?$

Soru : $P (x - 2) + P (x + 2) = 6x^2 - 3x + 8$ ise $P (x) = ?$

Polinomun Kökleri

Kural 1: Kökleri x_1 , x_2 ve x_3 olan üçüncü dereceden polinomun denklemi $P(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ eşitliği ile bulunur. a 'yı bulmak için soruda verilen diğer terim kullanılır. En sonunda parantezler çarpılır ve denklem elde edilir.

Örnek: Kökleri -1 , 1 ve -2 olan P polinomu için $P(2) = 12$ ise polinomun denklemini bulunuz.

Soru : Kökleri -1 , 2 ve 3 olan P polinomu için $P(0) = -6$ ise polinomun denklemini bulunuz.

Kural 2: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomunun kökleri
(yani $P(x) = 0$ yapan x değerleri) için d 'nin çarpanlarından
hangilerinin polinomu 0 yaptığı kontrol edilir.

Örnek: $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ polinomunun köklerini
bulunuz.

Soru : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomunun köklerini bulunuz.

www.egitimhane.com