

( Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir. )

## 9. 2. Kümeler

### 9. 2. 1. Kümelerde Temel Kavramlar

**Terimler ve Kavramlar :** Küme, eleman, evrensel küme, boş küme, alt küme, sonlu küme, sonsuz küme, eşit kümeler.

**Sembol ve Gösterimler :**  $\in$  ,  $\notin$  ,  $\emptyset$  ,  $\subseteq$  ,  $\supseteq$  ,  $\not\subseteq$  ,  $s ( A )$   
 $\{ x_1 , x_2 , x_3 , . . . , x_n \}$  ,  $\{ x \mid x \text{'in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler} \}$

#### 9. 2. 1. 1. Kümeler ile ilgili temel kavramları açıklar.

- A ) Kümelerle ilgili gerçek hayattan örneklerle yer verilir.
- B ) Kümelerin farklı gösterimlerine yer verilir.
- C ) Cantor'un çalışmalarına yer verilir.

#### 9. 2. 1. 2. Alt kümeyi kullanarak işlemler yapar.

- A ) Alt küme kavramı ve özellikleri ele alınır.
- B ) Alt küme kavramıyla ilgili gerçek hayattan örneklerle yer verilir.
- C ) Kombinasyon gerektiren problemlere girilmez.

**9. 2. 1. 3. İki kümenin eşitliğini kullanarak işlemler yapar.**

**A ) İki kümenin eşitliği kavramı alt küme ile ilişkilendirilir.**

**B ) Denk küme kavramı verilmez.**

## **9. 2. 2. Kümelerde İşlemler**

**Terimler ve Kavramlar :** Birleşim, kesişim.

**Sembol ve Gösterimler :**  $\cup$  ,  $\cap$

**9. 2. 2. 1. Kümelerde birleşim, kesişim işlemleri yardımıyla problemler çözer.**

**A ) Kümelerin birleşim ve kesişim işlemlerinin özellikleri verilir.**

**B ) Ayrık küme kavramına yer verilir.**

**C ) En fazla üç kümenin birleşiminin eleman sayısını veren ilişkiler üzerinde durulur.**

**D ) Kümelerle yapılan işlemler ve sembolik mantıkta kullanılan sembol, gösterim ve bunlarla ifade edilen işlemler arasında aşağıdaki ilişkilendirmeler yapılır.**

## 2. ÜNİTE : KÜMELER

### Kümeler

#### Küme Kavramı

Tanım : Küme; iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerden oluşan topluluktur.

Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine “kümenin elemanı” adı verilir.

Kümeler çoğunlukla  $A, B, C, \dots$  gibi büyük harflerle gösterilir.

$x \in A \longrightarrow x, A$  kümesinin elemanıdır anlamına gelir.

$y \notin A \longrightarrow y, A$  kümesinin eleman değildir.

✓ Bir  $A$  kümesinin eleman sayısı  $s(A)$  ile gösterilir.

✓ Kümede aynı eleman sadece **bir** defa kullanılır.

**Soru :** Aşağıdaki ifadelerden hangileri küme belirtir ?

- 1. Ülkemizin en güzel illeri**
- 2. Ankara'daki parklar**
- 3. Sınıfın en başarılıları**
- 4. Doğal sayılar**
- 5. Tek basamaklı asal sayılar**

## Kümelerin Gösterimi

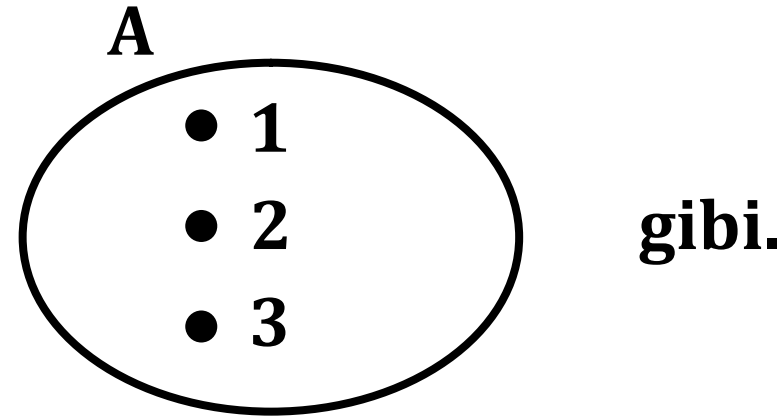
1) Liste Yöntemi İle Gösterim : Kümenin elemanlarının  $\{ \}$  biçimindeki paranteze sıra gözetmeksizin aralarına virgül kullanılarak yazıldığı gösterim şeklidir.

Örnek: KAHRAMANMARAŞ ilinin harflerinden oluşan A kümesini ve eleman sayısını bulunuz.

**Soru :** 30 'dan küçük asal sayıların kümesi A ise, A kümesini ve eleman sayısını bulunuz.

**Soru :**  $K = \{ a , \{ b , c \} , \{ d \} , e , f , \{ g , h , i \} , k \}$   
kümesi için  $s ( K ) = ?$

2) Venn Şeması İle Gösterim : Kümeyi oluşturan elemanların kapalı bir şekil içerisinde önlerine • işareti konularak gösterilme şeklidir.



Soru :  $A = \{ x : x < 100 , x \in \mathbb{N} \text{ ve } x \text{ sayısı } 2 \text{ 'nin kuvvetidir} \}$  kümesini Venn şeması ile gösteriniz.

**Soru :**  $-\frac{15}{7}$  ile  $\frac{11}{3}$  sayıları arasındaki tam sayıların oluşturduğu kümeyi Venn şeması ile gösteriniz.



3 ) Ortak Özellik Yöntemi İle Gösterim : Küme elemanlarının ortak özelliği belirtilerek yapılan gösterim şeklidir.

$$A = \{ x : \text{ortak özellik belirtilir} \}$$


“ Öyle bir x elemanı vardır ki ” anlamına gelir.

Küme ,  $A = \{ x \mid \text{ortak özellik belirtilir} \}$  şeklinde de verilebilir.

Örnek:  $A = \{ x : -3 < x \leq 4 \text{ ve } x \in \mathbb{Z} \}$  kümesini liste şeklinde yazınız ve eleman sayısını bulunuz.

**Soru :**  $A = \{ x : x^2 \leq 144 \text{ ve } x \in S \}$  ise  $s(A) = ?$

**Soru :**  $A = \{ x : x \text{ tam sayısı } 12 \text{ ve } 15 \text{ 'i tam böler} \}$  kümesi için  $s(A) = ?$

**Soru:**  $A = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$  kümesinin ortak özellik yöntemi ile gösterimini yazınız. ( Birden fazla gösterim yapılabilir. )

## Boş Küme ve Evrensel Küme

1) Elemanı olmayan kümeye “boş küme” adı verilir.  $\{ \}$  veya  $\emptyset$  sembolü ile gösterilir.

Örnek:  $A = \{ x : x^2 = -4 \text{ ve } x \in \mathbb{Z} \}$  ve  $B = \{ x : x \text{ negatif bir doğal sayıdır} \}$  kümelerinin elemanlarını bulunuz.

2) Üzerinde işlem yapılan bütün kümeleri kapsayan ve boş kümeden farklı olan kümeye “evrensel küme” adı verilir ve  $E$  harfi ile gösterilir.

## Sonlu ve Sonsuz Küme

Elemanları ; sınırlı ( sayılabilen ) sayıda olan kümeye “ sonlu küme ” , sınırsız ( sayılamayan ) sayıda olan kümeye de “ sonsuz küme ” adı verilir.

Soru : Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını inceleyerek türlerini inceleyiniz.

1 )  $A = \{ x : x < 20 , x = 3k , k \in \mathbb{Z}^+ \}$

2 )  $B = \{ x : x \text{ dört basamaklı çift sayıdır} \}$

**3 )**  $M = \{ x : x, 2 \text{ ile } 3 \text{ 'ün katıdır ve } x \in \mathbb{Z} \}$

**4 )**  $A = \{ 1, 2 \}$  ve  $B = \{ 3, 4, 5 \}$  için  
 $C = \{ x : x = y + z, y \in A \text{ ve } z \in B \}$

## Alt Küme

Bir A kümesinde bulunan her eleman aynı zamanda B kümesinde de bulunuyorsa, A kümesine B'nin bir “alt kümesi” adı verilir.  $A \subseteq B$  olarak gösterilir. ( A , B'nin alt kümesidir. )

Alt küme sembolüdür.

Veya  $B \supseteq A$  olarak ta gösterilebilir. ( B , A'yı kapsar. )

Kapsar sembolüdür.



\*\*\* Boş küme her kümenin alt kümesidir.

\*\*\* Her küme kendisinin alt kümesidir. Yani  $A \subseteq A$ 'dır.

Örnek:  $A = \{ 2 , 4 \}$  ,  $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$  ve  
 $C = \{ 2 , 3 , 4 \}$  kümeleri arasındaki ilişkiyi inceleyiniz ve kümeleri Venn şeması ile gösteriniz.



**Soru:**  $A = \{ x : 0 < x \leq 16, x \text{ çift sayı} \}$  ve  
 $B = \{ x : 2 \leq x < 13, x \text{ asal sayı} \}$  kümeleri veriliyor. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

1.  $A \subseteq B$
2.  $B \subseteq A$
3. A ve B sonlu kümedir.
4.  $s(A) + s(B) = 13$  'tür.

Örnek:  $A = \{ k , m \}$  kümesini alalım. Kümede;

1)  $k \in A$  'dır. 2)  $m \notin A$  'dır. Çünkü  $m$  tek başına bir küme oluşturmaz. Doğrusu  $\{ m \} \subseteq A$  olmalıydı.

Soru:  $A = \{ 1 , 2 , \{ 3 , 4 \} , 5 , \{ 6 \} , 7 \}$  kümesi veriliyor. Aşağıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur ?

1.  $2 \in A$

2.  $s ( A ) = 7$

3.  $\{ 5 \} \subseteq A$

4.  $\{ 6 \} \subseteq A$

5.  $\{ 3 , 4 \} \in A$

6.  $\{ 2 , \{ 6 \} \} \subseteq A$

**Soru :**  $A = \{ a , b , c \}$  kümesinin tüm alt kümelerini yazınız.

**Soru:**  $A = \{ 1 , 2 \}$  ve  $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$  kümeleri veriliyor.  $A \subseteq K \subseteq B$  olacak şekilde kaç  $K$  kümesi bulunabilir ?

Kural : 1)  $n$  elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı  $2^n$  'dir.

Tanım : Bir kümenin kendisinden başka her alt kümesine, bu kümenin bir “ öz alt kümesi ” adı verilir.

2)  $n$  elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısı  $2^n - 1$  'dir.

Soru :  $A = \{ x : x \text{ sayısı } 16 \text{ 'yı tam böler ve } x \in \mathbb{N} \text{ 'dir} \}$  kümesinin alt küme sayısını bulunuz.

**Soru :** 14421333411234 sayısının rakamlarından oluşan kümenin öz alt küme sayısını bulunuz.

**Soru :** 63 tane öz alt kümesi bulunan kümenin eleman sayısını bulunuz.

**Soru :** Alt küme sayısı ile öz alt küme sayısı toplamının 127 olduğu kümenin eleman sayısını bulunuz.

**Soru :** Alt küme sayısının 20 fazlası, öz alt küme sayısının 4 katına eşit olan kümenin eleman sayısını bulunuz.



Örnek:  $A = \{ k, l, m, n \}$  kümesinin  $k$ 'yi içeren ama  $m$ 'yi içermeyen kaç alt kümesi vardır ? ( **Kümeler tek tek liste yöntemiyle de yazılabilir.** )

**Soru:**  $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$  kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde ;

**1)** 5 bulunmaz ?

**2)** 4 bulunur ?

**3)** 3 ve 5 bulunur ?

**4 ) 1 vardır ama 2 ve 5 yoktur ?**

**5 ) 1 veya 4 vardır ?**

**Tanım :** Aynı elemanlara sahip kümelere “ eşit kümeler ” adı verilir. A ile B eşit kümeler ise  $A = B$  şeklinde gösterilir.

**\*\*\***  $A = B$  ise  $A \subseteq B$  ve  $B \subseteq A$  olarak alınabilir.

**Soru :**  $A = \{ x \mid x \leq 4 , x \text{ bir rakam} \} ,$   
 $B = \{ x \mid x , \text{ karesi } 20\text{'den küçük olan tam sayılar} \}$  ve  
 $C = \{ x \mid -5 < x < 5 , x \text{ bir tam sayı} \}$  kümelerinden eşit olan kümeleri bulunuz.

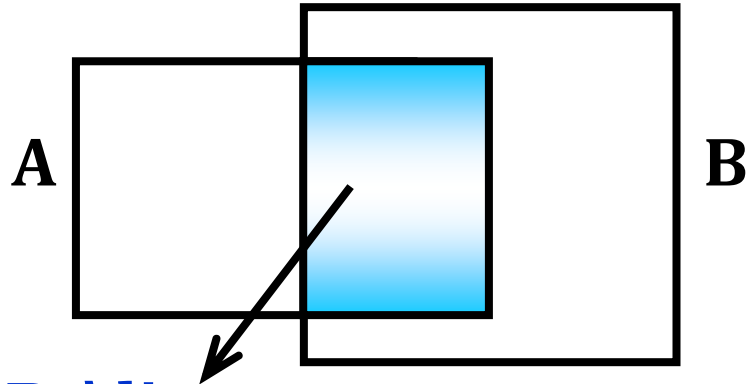
## Kümelerde İşlemler

### Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemleri

Kesişim : A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye “kesişim kümesi” adı verilir ve  $A \cap B$  ile gösterilir.

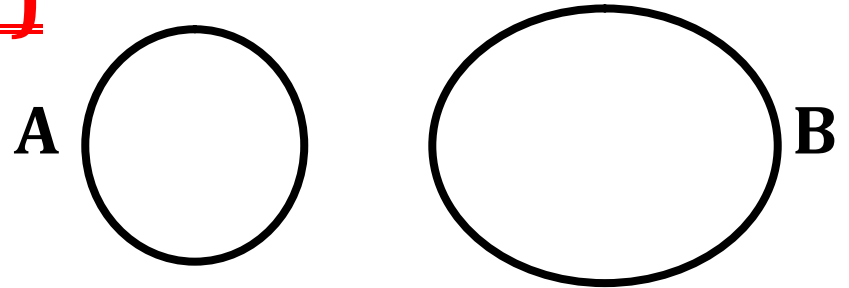
$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \in B \}$  olarak gösterilir.

1)



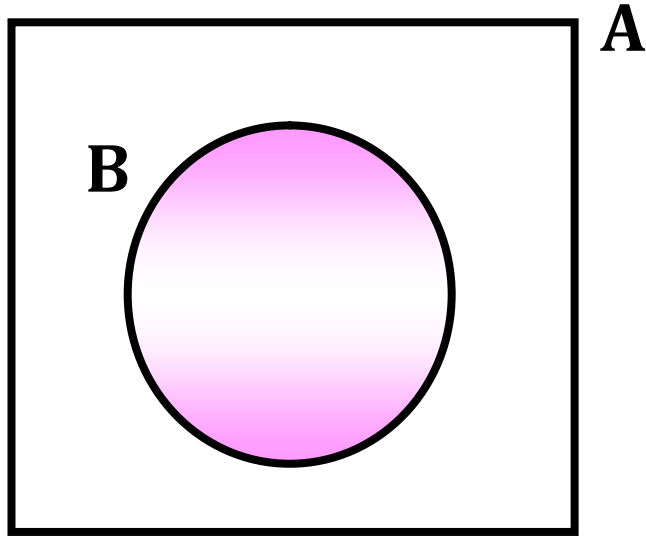
$A \cap B$  'dir.

2)



$A \cap B = \emptyset$  'dir.

3)



$B \subseteq A$  ise  $A \cap B = B$  olarak alınır. ( Bir küme diğerinin alt kümesi ise, iki kümenin kesişimi küçük olan kümeyi verir. )

4)

$A \cap \emptyset = \emptyset$  olarak alınır.

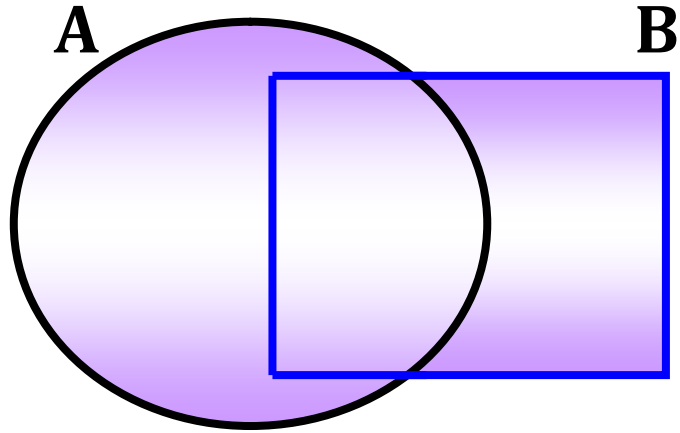
5)

$A \cap A = A$  'dır.

Birleşim : A ve B küme elemanlarının tamamının oluşturduğu kümeye “birleşim” kümesi adı verilir ve  $A \cup B$  olarak gösterilir.

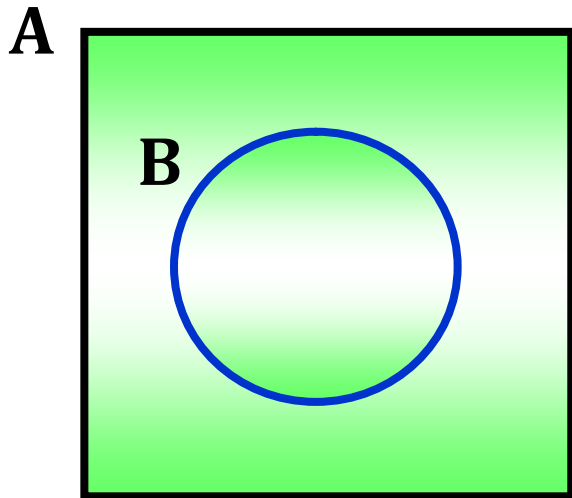
$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ veya } x \in B \}$  olarak alınır.

1)



Şekildeki taralı bölgenin tümü  
 $A \cup B$  kümesini verir.

2)



$B \subseteq A$  ise  $A \cup B = A$  olarak

alınır ( Bir küme diğerinin alt kümesi  
ise, iki kümenin birleşimi büyük olan  
kümeyi verir.

3)

$A \cup A = A$  'dır.

4)

$A \cup \emptyset = A$  'dır.

**Soru:**  $A = \{ a , b , c , d \}$  ve  $B = \{ e , f , c , b , k \}$  kümeleri için  $A \cap B$  ve  $A \cup B$  kümelerini bulup, Venn şeması ile gösterimini yapınız.



**Soru :**  $A = \{ x : x \in \mathbb{N} \text{ ve } x \leq 12 \}$  ve  $B = \{ x : x < 13 \text{ ve } x \text{ asal sayı} \}$  kümeleri veriliyor.  $A \cap B$  ve  $A \cup B$  kümelerini bulup, Venn şeması ile gösterimini yapınız.

**Soru:**  $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$  ,  $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$   
ise  $B$  'nin en fazla ve en az olabilecek eleman sayısını bulunuz.

Soru:  $B \subseteq A \subseteq C$  ise;

1)  $(A \cap B) \cup C = ?$

2)  $(C \cap B) \cup (A \cap C) = ?$

**Soru:**  $A = \{ x : 6 \leq x < 96 , x = 6k \}$  ile  
 $B = \{ x : 22 < x < 110 , x = 6k \}$  ise  $A \cup B$  kümesini ve eleman sayısını bulunuz.

**Not:** Bu tarz sorularda birleşim istenirse en **geniş** aralık alınır.

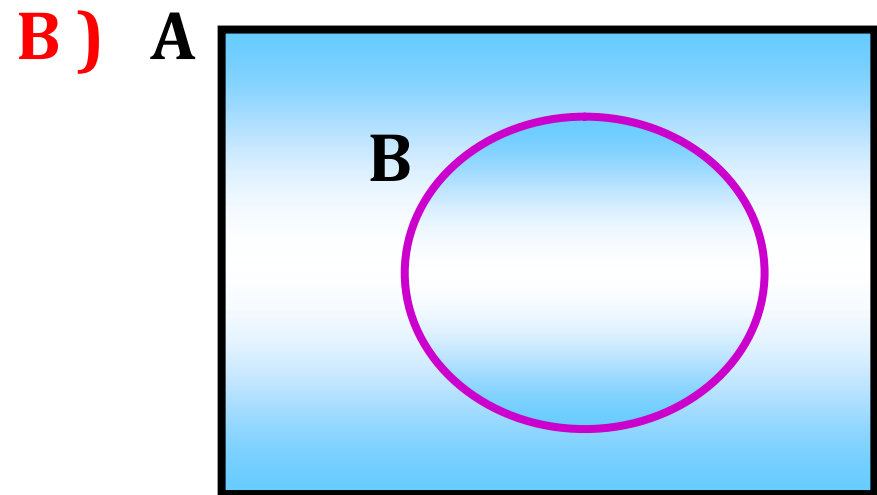
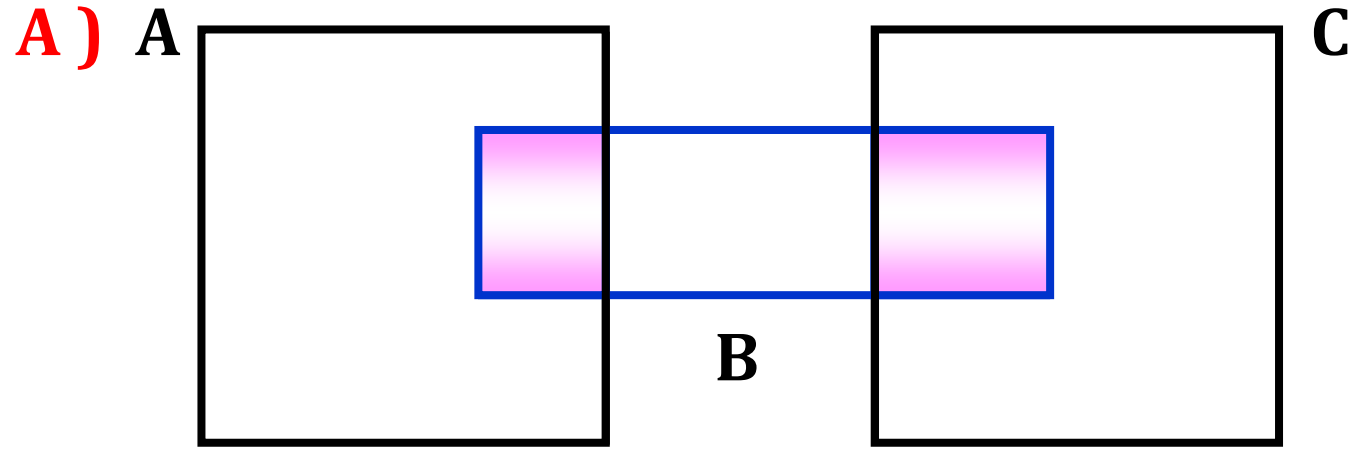
**Terim sayısı =  $\frac{\text{Son terim} - \text{ilk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$  eşitliği ile bulunur.**

**Soru:**  $A = \{ x : -30 < x \leq 82, x = 4k \}$  ile  
 $B = \{ x : 0 \leq x < 100, x = 4k \}$  ise  $A \cup B$  kümesini ve eleman sayısını bulunuz.

**Soru:**  $A = \{ x : -25 \leq x < 100, x = 5k \}$  ile  
 $B = \{ x : -5 \leq x \leq 155, x = 5k \}$  ise  $A \cap B$  kümesini ve eleman sayısını bulunuz.

**Not:** Kesişim istenirse iki kümenin **ortak** aralığı alınır.

**Soru :** Venn şeması üzerinde verilen taralı - boyalı kısmı belirten kümeyi kesişim ve birleşim sembolleri kullanarak yazınız.

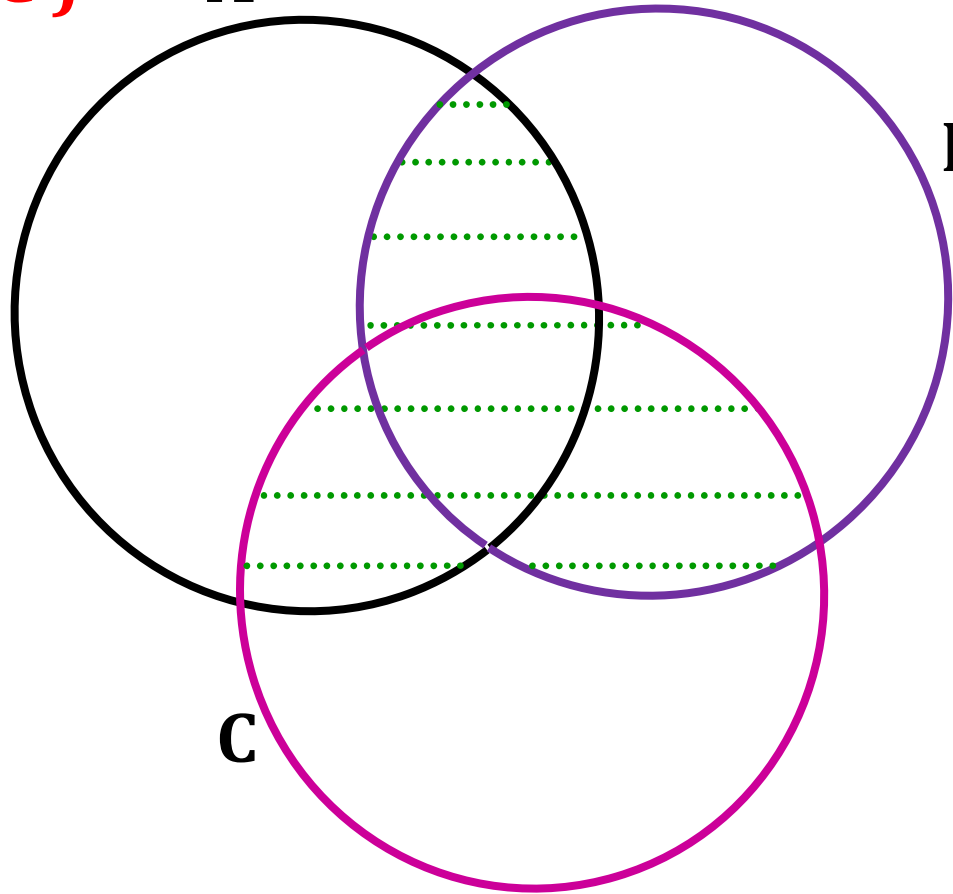


**C )**

**A**

**B**

**C**

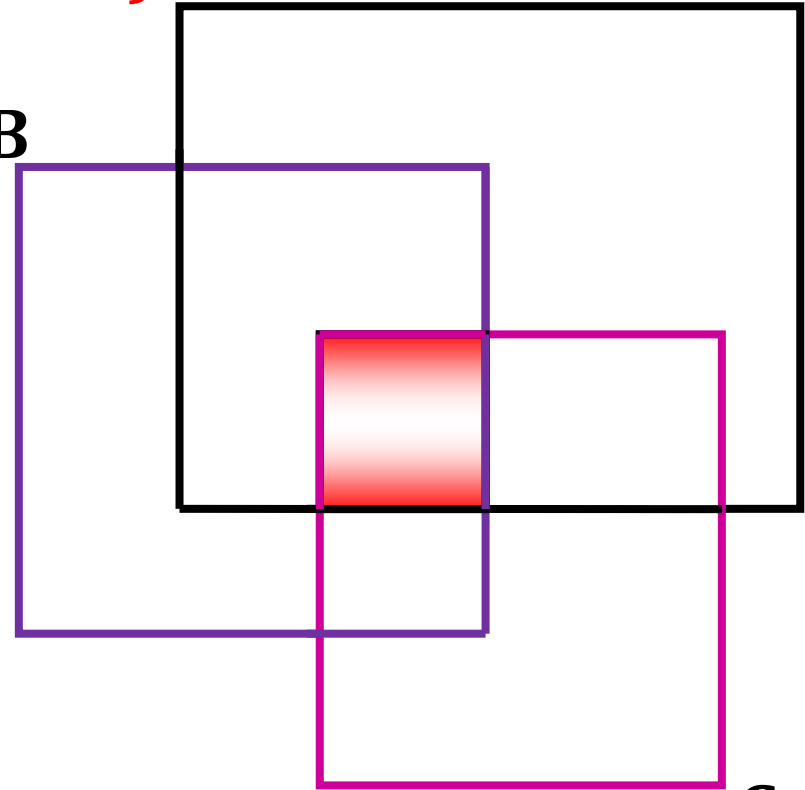


**D )**

**A**

**B**

**C**





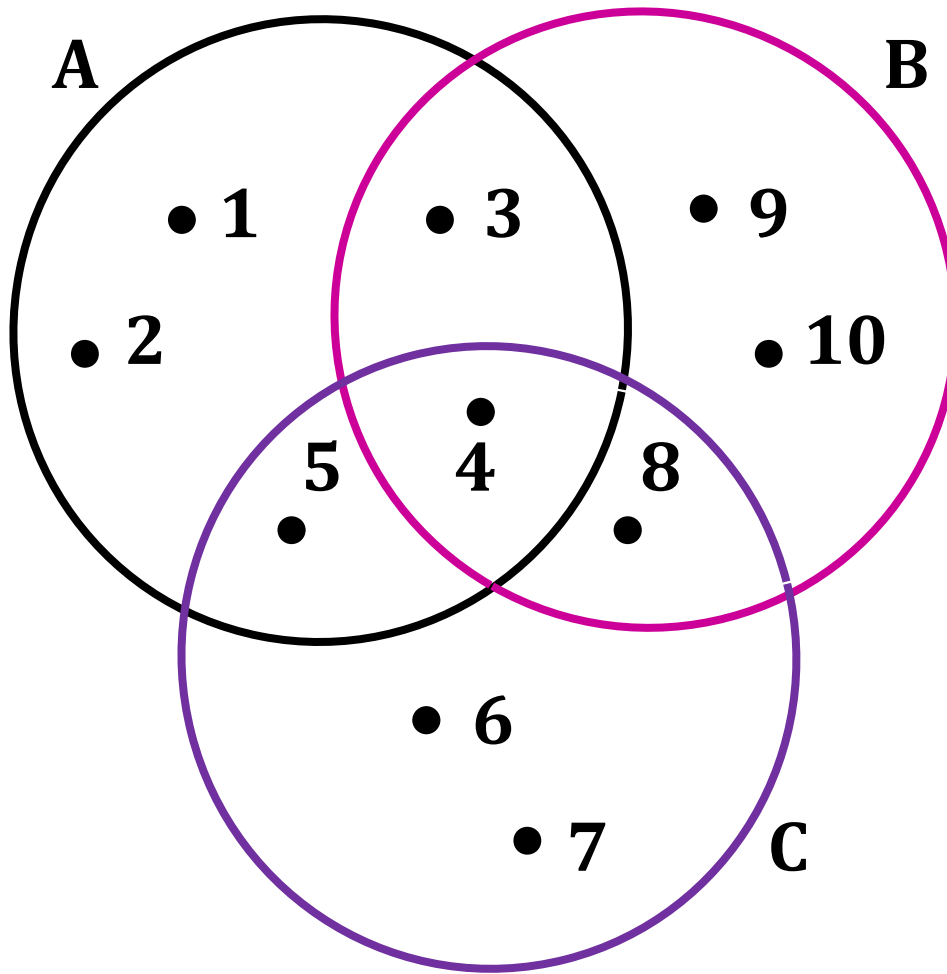
**Kural:** ( Dağılma özelliği )

$$A \cap ( B \cup C ) = ( A \cap B ) \cup ( A \cap C ) \text{ ve}$$

$$A \cup ( B \cap C ) = ( A \cup B ) \cap ( A \cup C ) \text{ olarak alınabilir.}$$

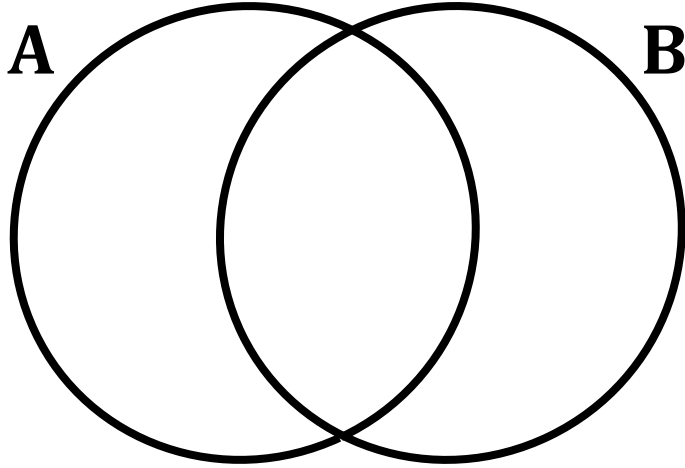
**Soru:**  $A \cap B = \{ a , b , c , d \}$  ve  $A \cap C = \{ b , d , e , f \}$  ise  
 $A \cap ( B \cup C ) = ?$

Soru :



Verilenlere göre  
 $A \cup (B \cap C)$   
kümesinin elemanlarını  
bulunuz.

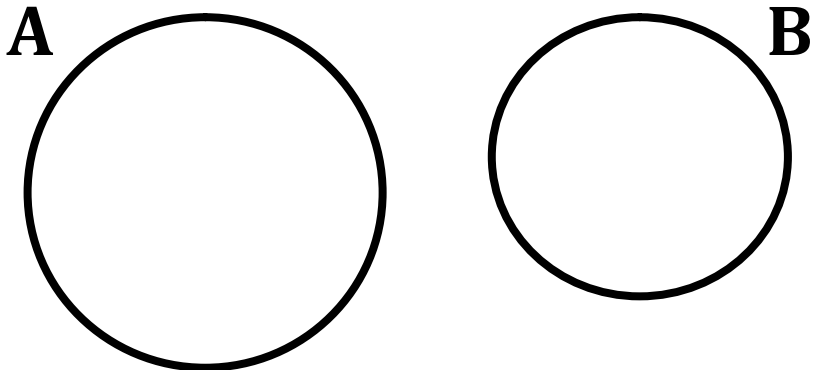
Kural 1: **A )**  $A, B$  iki küme ve  $A \cap B \neq \emptyset$  olsun.



$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

olarak alınır.

**B )**  $A, B$  iki küme ve  $A \cap B = \emptyset$  ( $A$  ile  $B$ 'ye “ayrık kümeler” adı verilir.) olsun.



$$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$$

olarak alınır.

Örnek: A'nın eleman sayısı 35, B'nin eleman sayısı 42 ve  $A \cap B$ 'nin alt küme sayısı 64 ise  $s ( A \cup B ) = ?$

**Soru:**  $s(A) = 3x - 2$  ,  $s(B) = 4 + x$  ,  $s(A \cap B) = 7$  ve  
 $s(A \cup B) = 35$  ise  $s(B) = ?$

**Soru:**  $s(A) = 5 \cdot s(B)$  ,  $s(A \cap B) = 23$  ve  
 $s(A \cup B) = 67$  ise  $s(B) = ?$

**Soru:**  $s(A \cup B) = 100$  'dür. A 'nın eleman sayısı,  $A \cap B$  'nin eleman sayısının 2 katı, B 'nin eleman sayısının ise yarısıdır. Buna göre  $s(A) = ?$

**Soru:**  $4 \cdot s(A) = 2 \cdot s(B) = 6 \cdot s(A \cap B)$  ve  
 $s(A \cup B) = 63$  ise  $s(B) = ?$



**Soru :** Herkesin Almanca veya Fransızca dillerinden birini bildiği 52 kişilik grupta; Almanca bilenler 31 kişi, Fransızca bilenler 38 kişi ise her iki dili bilen kaç kişi vardır ?

**Soru :** Herkesin kimya veya tarih derslerinden birinden başarılı olduğu 80 kişilik grupta, iki dersten de başarılı olanların sayısı 15 'tir. Tarihten başarılı olanların sayısı, kimyadan başarılı olanların sayısının 4 katı ise kimyadan kaç kişi başarılı olmuştur ?

**Kural 2:** A, B ve C üç küme verilsin.

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C) \text{ olarak alınır.}$$

**Örnek:** 37 kişilik bir grupta; 23 kişi Ankara'yı, 14 kişi Bursa'yı, 18 kişi de İstanbul'u görmüştür. Ankara ve İstanbul'u 5 kişi, Ankara ve Bursa'yı 10 kişi, İstanbul ve Bursa'yı 7 kişi görmüştür. Buna göre bu üç şehri gören kaç kişi bulunur ?

**Soru :** En az bir dilin konuşulduğu 45 kişilik grupta; 20 kişi İngilizce, 28 kişi Fransızca ve 24 kişi de Almanca bilmektedir. 9 kişi ise üç dili de konuşabilmektedir. İki dil bilenlerin sayısı birbirine eşit ise, İngilizce ve Fransızca bilen kaç kişi vardır ?

## Kümelerdeki İşlemlerle Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişkiler

Kümelerde yapılan işlemler ile sembolik mantıkta kullanılan sembol ve gösterimler arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda verilmiştir. Kümelerde  $E$  harfi evrensel kümeyi gösterirdi.  $A$  ve  $B$  evrensel kümenin iki alt kümesi olsun.

$p$  ve  $q$  önermeleri sırasıyla  $A$  ve  $B$  kümeleri ile ilişkili olsun.

Kümeler	$A$	$B$	$E$	$\emptyset$	$A'$	$\vee$	$\wedge$	$=$
Sembolik Mantık	$p$	$q$	$1$	$0$	$p'$	$\cup$	$\cap$	$\equiv$

Örneğin; kümelerde  $E' = \emptyset$  idi. Bu işlemin sembolik gösterimi ise  $1' \equiv 0$  olarak alınır.

**Soru :** Tablonun sol kısmında eksik parçaları bulup, sağ kısmında ise verilen bileşik önermelerin küme gösterimini yazınız. (  $p$  ve  $q$  önermeleri sırasıyla  $A$  ve  $B$  kümeleri ile ilişkili olsun. )

Sembolik Mantık	Kümeler
$p \vee 0 \equiv$	
$q \wedge q' \equiv$	
$p \wedge q \equiv q \wedge$	
$1 \vee 0 \equiv$	
$p \wedge p \equiv$	
$(1')' \equiv$	